Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

Skript DIR 1.

1 Konvergenz von Folgen und Funktionenfolgen

Definition 1. Die reelle Folge $(c_n)_n$ *konvergiert* gegen den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ wenn: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|c_n - c| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\epsilon$.

Definition 2. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, und für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n : I \to \mathbb{R}$.
Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *punktweise* gegen die Grenzfunktion $g : I \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in I$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x).$$

Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *gleichmäßig* gegen die Grenzfunktion $g : I \to \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |g_n(x) - g(x)| = 0\,.$$

Satz 3. *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen $f : I \to \mathbb{R}$, dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig.*

Satz 4. *Sei I ein endliches Intervall in $\mathbb{R}$, und für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen $f : I \to \mathbb{R}$, dann gilt*

$$\lim_n \left(\int_I f_n(x)dx \right) = \int_I f(x)dx.$$

Satz 5 (Satz von der majorisierten Konvergenz)**.** *Sei I ein endliches Intervall in $\mathbb{R}$, und für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und konvergiere die Folge $(f_n)_n$ punktweise gegen $f : I \to \mathbb{R}$. Existiere $g : I \to \mathbb{R}$ mit $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in I$ und $\int_I g(x)dx < \infty$, dann gilt*

$$\lim_n \left(\int_I f_n(x)dx \right) = \int_I f(x)dx\,.$$

2 Konvergenz von Reihen und Funktionenreihen

Definition 6. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent* gegen $c \in \mathbb{R}$, falls die Folge $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)_N$ ihrer Partialsummen gegen c konvergiert. Die Reihe heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz 7. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit reellen Summanden a_n.*

a) Bildet die Folge $(a_n)_n$ keine Nullfolge, dann konvergiert die Reihe nicht.

b) Leibniz-Kriterium. Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende reelle Nullfolge, mit $a_n > 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

c) Majorantenkriterium. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine konvergente reelle Reihe mit $b_n \geq 0$ und gelte für fast alle n: $|a_n| \leq b_n$, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

d) *Wurzel- und Quotientkriterium. Existiere* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: L \in \mathbb{R}$, *oder existiere* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: L \in \mathbb{R}$, *falls* $a_n \neq 0$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$.
Dann: 1) Falls $L < 1$, *konvergiert die Reihe absolut; 2) Falls* $L > 1$, *divergiert sie.*

e) *Falls die Reihe absolut konvergent ist, konvergiert sie.*

Wichtige Beispiele. i) *Die geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ $(q \in \mathbb{C})$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$. In diesem Fall ist der Limes $\frac{1}{1-q}$.

ii) *Die allgemeine harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ divergiert für $\alpha \leq 1$ und konvergiert für $\alpha > 1$.

Definition 8. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine Funktionenreihe, mit den Reihengliedern $f_n : I \to \mathbb{R}$.
Sie heißt *punktweise konvergent* (bzw. *gleichmäßig konvergent*) auf I gegen die Grenzfunktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, falls die Folge $\left(\sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right)_N$ ihrer Partialsummen punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen f konvergiert.

Satz 9 (Majorantenkriterium von Weierstraß). *Sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine konvergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen und es gelte für alle Funktionen* $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}_{>0})$ *die Ungleichung* $|f_n(x)| \leq a_n$ *für alle* $x \in I$, *so ist die Funktionenreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *gleichmäßig auf* I *konvergent.*

3 Differentiation von Integralfunktionen

Satz 10 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion.*
i) Für alle $x_0 \in [a, b]$ *ist die Funktion* $F : [a, b] \to \mathbb{R}\,, F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ *differenzierbar und eine Stammfunktion von* f, *d.h.* $F'(x) = f(x)$ *für alle* $x \in [a, b]$.
ii) Sei $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine Stammfunktion von* f, *dann gilt* $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$.

Satz 11 (Differentierbarkeit von Parameter-Integralen). *Sei* $B \subseteq \mathbb{R}$ *offen,* $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *ein abgeschlossenes Intervall und* $f : B \times I \to \mathbb{R}, (x, t) \mapsto f(x, t)$ *stetig, und stetig partiell differenzierabar nach* x, *so ist auch* $F : B \to \mathbb{R}\,, F(x) := \int_a^b f(x, t)\,dt$ *stetig differenzierbar und es gilt*

$$\frac{d}{dx}F(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)dt\,.$$

Satz 12 (Leibnizsche Formel). *Sei* $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}, (x, t) \mapsto f(x, t)$ *stetig und nach* x *stetig differenzierbar. Die Funktionen* $\psi, \phi : [a, b] \to [c, d]$ *seien differenzierbar.*
Dann ist $h(x) := \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, t)\,dt$ *auf* $[a, b]$ *differenzierbar mit*

$$h'(x) = f\,(x, \psi(x)) \cdot \frac{d}{dx}\psi(x) - f\,(x, \phi(x)) \cdot \frac{d}{dx}\phi(x) + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\,dt\,.$$

Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

Skript DIR 2.

1 Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen

Definition 1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $a \in U$ *(total) differenzierbar*, falls es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lim_{x \to a} \frac{||f(x) - f(a) - L(x-a)||}{||x-a||} = 0\,.$$

Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $u \in U$ *partiell differenzierbar* in der k-ten Koordinatenrichtung, falls der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(u) := \lim_{h \to 0} \frac{f(u + he_i) - f(u)}{h}$$

existiert. Dabei ist e_i der $i$te Standardbasisvektor in $\mathbb{R}^n$.

Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt *partiell differenzierbar*, falls $\frac{\partial f}{\partial x_k}(u)$ fur alle $u \in U$ und alle $k = 1, \ldots, n$ existiert; und f heißt *stetig partiell differenzierbar*, falls zusätzlich alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k} : U \to \mathbb{R}$ stetig sind.

Satz 2. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ sei im Punkt $a \in U$ total differenzierbar, dann ist f in a stetig und partiell differenzierbar.*

Satz 3. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $f : U \to \mathbb{R}$ eine in U partiell differenzierbare Funktion. Seien alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ im Punkt $x \in U$ stetig, dann ist f in x total differenzierbar.*

2 Extremalstellen

Satz 4 (Satz von Weierstraß)**.** *Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (oder von $\mathbb{C}$), und sei $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f Maximum und Minimum auf K an.*

Satz 5 (notwendige Bedingung für lokales Extremum)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Besitzt f in $u \in U$ ein lokales Extremum, so ist u eine kritische Stelle von f, also gilt $\nabla f(u) = 0$.*

Satz 6 (hinreichende Bedingung für lokales Extremum)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $u \in U$ eine kritische Stelle von f.*

a) Ist die Hesse-matrix $Hf(u)$ von f in u positiv definit, so besitzt f in u ein isoliertes lokales Minimum.

b) Ist die Hesse-matrix $Hf(u)$ von f in u negativ definit, so besitzt f in u ein isoliertes lokales Maximum.

c) Ist die Hesse-matrix $Hf(u)$ von f in u indefinit, so besitzt f in u kein lokales Extremum.

Extrema mit Nebenbedingung

Satz 7 (Verfahren der Lagrange-Multiplikatoren)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $M \subseteq U$ die Untermannigfaltigkeit $M := \{x \in U \mid g(x) = 0\}$, wobei $g : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist, mit $\nabla g \neq 0$ für alle $x \in M$.*

Weiter sei $F : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass $F_{|M}$ in einem Punkt $a \in M$ ein lokales Extremum besitzt.

Dann existiert eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass $\nabla F(a) + \lambda \nabla g(a) = 0$.

3 Fixpunktsatz von Banach

Definition 8. Ein metrischer Raum ist ein *vollständiger Raum*, wenn jede Cauchy-Folge von Elementen des Raums konvergiert.

Definition 9. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $\Phi : M \to M$ heißt *Kontraktion*, wenn es eine reelle Zahl $L \in [0, 1)$ gibt, so dass für alle $x, y \in M$ gilt:

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq L \cdot d(x, y)\,.$$

Satz 10 (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum, und sei $\Phi : M \to M$ eine Kontraktion.*

Dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein eindeutig bestimmtes $m_* \in M$ mit $\Phi(m_*) = m_*$.

Für einen beliebigen Anfangswert $m_0 \in M$ konvergiert die durch $m_k := \Phi(m_{k-1})$ rekursiv definierte Folge $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den Fixpunkt m_*.

4 Satz von Fubini und der Transformationssatz

Satz 11 (Satz von Fubini). *Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Elementarenbereich*

$$V := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_j(x_1, \ldots, x_{j-1}) \leq x_j \leq b_j(x_1, \ldots, x_{j-1})\}\,,$$

und sei $f : V \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, dann

$$\int_V f\ dV = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{a_n(x_1,\ldots x_{n-1})}^{b_n(x_1,\ldots x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\ dx_n \cdots dx_2 dx_1\,.$$

Bemerkung 12. Dabei spielt die Reihenfolge der Variablen bei der Beschreibung des Elementarbereichs keine Rolle. Insbesondere gilt für Doppelintegrale mit konstanten Integrationsgrenzen

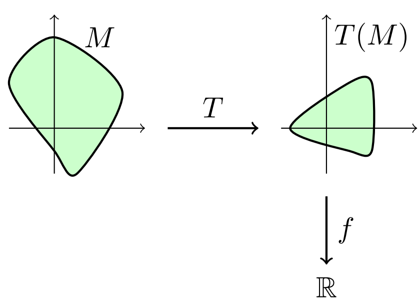
$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\ dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\ dydx\,.$$

Definition 13. Seien M und N offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Eine bijektive Abbildung $F : M \to N$ heißt *Diffeomorphismus*, falls f und ihre Umkehrabbildung f^{-1} stetig differenzierbar sind.

Satz 14. *Sei $F : D \to F(D)$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wenn F bijektiv mit $\det JF(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ ist, dann ist F eine Diffeomorphismus.*

Satz 15 (Transformationssatz). *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, und sei $T : M \to T(M) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Diffeomorphismus.*
Dann ist die Funktion $f(v)$ auf $T(M)$ genau dann integrierbar, wenn die Funktion $f(T(z))|\det JT(z)|$ auf M integrierbar ist.
In diesem Fall gilt:

$$\int_{T(M)} f(v)\,\mathrm{d}v = \int_M f(T(z))|\det JT(z)|\,\mathrm{d}z\,.$$



Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

Skript DGL 1.

1 Existenz-und Eindeutigkeitssätze

Sei $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sei $F : B \to \mathbb{R}^n\,, (t, \mathbf{x}) \mapsto F(t, \mathbf{x})$ eine stetige Funktion.

Definition 1. Sei U eine offene Teilmenge von B. Wenn eine Konstante $L \geq 0$ gibt, so dass

$$||F(t, \mathbf{v}) - F(t, \mathbf{u})|| \leq L \cdot ||\mathbf{v} - \mathbf{u}|| \qquad \forall (t, \mathbf{v}), (t, \mathbf{u}) \in U$$

gilt, sagt man dass die Funktion F auf U *Lipschitz-stetig bezüglich* $\mathbf{x}$ ist.
Wenn es um jeden Punkt $(t, \mathbf{x}) \in B$ eine Umgebung $U \subseteq B$, auf der F Lipschitz-stetig bzgl. $\mathbf{x}$ ist, heißt F *lokal Lipschitz-stetig bezüglich* $\mathbf{x}$.

Satz 2. *Wenn die Funktion $F : B \to \mathbb{R}^n$ nach der Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ stetig partiell differenzierbar ist, ist F auf B lokal Lipschitz-stetig bzgl.* $\mathbf{x}$.

Satz 3 (Picard-Lindelöf)**.** *Sei $F : B \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl.* $\mathbf{x}$.
Dann gibt es zu jedem Punkt $(t_0, \mathbf{x}_0) \in B$ genau eine maximale Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ (I offen, $t_0 \in I$) des AWP

$$\mathbf{x}' = F(t, \mathbf{x})\,, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0} \tag{1}$$

Bemerkung 4.
a) Eine Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ des AWP heißt *maximal*, wenn es keine Lösung $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ des AWP (1) gibt, mit $I \subset \tilde{I}$.
b) Wenn $F : B \to \mathbb{R}^n$ nur stetig ist, besitzt das AWP eine Lösung (Satz von Peano), aber diese ist nicht unbedingt eindeutig; z.B. $y' = \sqrt[3]{y^2}\,, y(0) = 0$ hat unendliche viele Lösungen.

Satz 5 (Linear beschränkte rechte Seite)**.** *Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $t_0 \in J$.*
Die Abbildung $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich $\mathbf{x}$.
Wenn es stetige Funktionen $\alpha, \beta : J \to [0, +\infty)$ gibt, so dass

$$||F(t, \mathbf{x})|| \leq \alpha(t) \cdot ||\mathbf{x}|| + \beta(t) \qquad \forall t \in J, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

gilt, dann existiert eine eindeutige Lösung von dem AWP (1) auf ganz J.

Bemerkung 6. Falls $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich $\mathbf{x}$ auf $J \times \mathbb{R}^n$ ist, existiert eine eindeutige Lösung des AWP (1) auf J.

Satz 7 (Randverhalten maximaler Lösungen)**.** *Sei $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung des AWP* (1). *Falls $b < \infty$ ist, gibt es genau zwei Möglichkeiten:*

- *entweder ist $\varphi(t)$ auf dem Intervall $[t_0, b)$ unbeschränkt:* $\lim_{t \to b^-} |\varphi(t)| = \infty$;
- *oder der Rand ∂B von B ist nichtleer und es gilt* $\lim_{t \to b^-} \text{Abstand}((t, \varphi(t)), \partial B) = 0$.

Eine ähnliche Aussage gilt falls $a > -\infty$.

Bemerkung 8. Sei $F\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige und Lipschitz-stetige Funktion, und sei $\varphi\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der *autonomen* DGL $\mathbf{x}(t)' = F(\mathbf{x}(t))$. Falls der Grenzwert $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) =: \gamma \in \mathbb{R}^n$ existiert, ist γ eine konstante Lösung der DGL, d.h.$F(\gamma) = 0$.

2 Eindimensionale Lösungsverfahren

Sei $F : G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine stetige und lokal Lipschitz-stetige bzgl. x Abbildung und betrachte das Anfangswertproblem

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \,. \tag{2}$$

Trennung der Variablen.

Wenn man F als Produkt $F(t, x) = g(t) \cdot h(x)$ mit stetigen Funktionen g, h darstellen kann, bekommt man die Differentialgleichung

$$x'(t) = g(t) \cdot h(x(t)) \,.$$

Falls $h(x_0) = 0$ hat das AWP die konstante Lösung: $x(t) \equiv x_0$.
Falls $h(x_0) \neq 0$ ergibt sich durch "Bruchrechnung" eine Trennung der Variablen:

$$\frac{1}{h(x(t))} \cdot x'(t) = g(t) \,.$$

Sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ und G eine von g, so ist

$$H(x(t)) = G(t) + c \,, \qquad \text{wobei } c := H(x_0) - G(t_0) \,.$$

Wegen $H'(x(t)) = \dfrac{1}{h(x(t))} \neq 0$ kann man diese Gleichung lokal nach x auflösen und erhält die Lösung

$$x(t) = H^{-1}(G(t) + H(x_0) - G(t_0)) \,.$$

Variation der Konstanten.

Wenn man F als $F(t, x) = g(t) \cdot x + h(t)$ mit stetigen Funktionen $g, h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ darstellen kann, bekommt man die inhomogene lineare Differentialgleichung $x' = g(t) \cdot x + h(t)$.
Man löst man erst mit Trennung der Variablen die zugehörige homogene DGL $x' = g(t) \cdot x$:

$$x(t) = C \cdot e^{G(t)} \,, \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \,,$$

wobei G eine Stammfunktion zu g ist.
Um eine Lösungen der inhomogene Gleichung $y' = g \cdot y + h$ zu finden, macht man den Ansatz

$$x = C(t) \cdot e^{G(t)} \,,$$

den man als *Variation der Konstanten* bezeichnet. Es ist

$$x' = C'e^G + Cge^G = gx + C'e^G \qquad \Longrightarrow \qquad C' = he^{-G}$$

Man bestimmt die gesucht Funktion $C : I \to \mathbb{R}$ als Stammfunktion von he^{-G}.
Die maximale Lösung $\phi : I \to \mathbb{R}$ des AWP (2) ist dann durch die Formel

$$\phi(t) = e^{G(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} h(s) e^{-G(s)} ds \right)$$

gegeben.

Picard-Lindelöf Iterationsverfahren

Sei φ_0 die konstante Funktion $\varphi_0(t) = x_0$ und

$$\varphi_k(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_{k-1}(s)) ds \,.$$

Dann konvergiert die Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf einer Umgebung von t_0 gleichmäßig gegen die Lösung des AWP (2).

Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

Skript DGL 2.

1 Lineare Differentialgleichungssysteme

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $n \in \mathbb{N}$. Seien $A\colon I \to Mat(n \times n, \mathbb{R})$, und $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$x'(t) = A(t) \cdot x(t) + b(t) \tag{1}$$

eine *lineares Differentialgleichungssystem.* Das System $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$ nennt man das zugehörige *homogene Differentialgleichungssystem.*

Bemerkung 1. Das AWP $x'(t) = A(t) \cdot x(t) + b(t)$ $x(t_0) = x_0$ $((t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n)$ besitzt stets eine eindeutige Lösung.

Satz 2 (Superpositionsprinzip)**.** *Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Lösungen der DGL* (1) *und sei $\mathcal{L}_0$ die Menge aller Lösungen der homogen DGL $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$. Dann gilt:*

a) $\mathcal{L}_0$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum.

b) $\mathcal{L}$ ist ein affiner Raum: es gilt $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + x_p$, wobei x_p eine spezielle Lösung der inhomogene DGL ist.

Ein *Fundamentalsystem* des Systems $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$ ist eine Basis $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ des Lösungsraums $\mathcal{L}_0$, die Matrix $X(t) := (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ wird dann *Fundamentalmatrix* genannt.

Satz 3. *Sei $B(t)$ eine Stammfunktion von $A(t)$. Wenn $A(t) \cdot B(t) = B(t) \cdot A(t)$ für $t \in I$ gilt, dann ist die Matrix*

$$X(t) = \exp\left(B(t)\right)$$

eine Fundamentalmatrix von $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$.
Insbesondere falls $A(t) := A$ eine konstante Matrix ist, ist $X(t) = e^{tA}$.

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten: $A(t) = A$**.**

Wenn das System konstanten Koeffizienten hat, kann man ein Fundamentalsystem von $x'(t) = A \cdot x(t)$ mit dem folgenden Ansatz finden.

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der Matrix A, und bezeichne k seine algebraische Vielfachheit. Der liefert dann k linear unabhängige Lösungen des System.
• Falls die geometrische Vielfachheit von λ gleich k ist, besitzt das System die Lösungen

$$v_1 e^{\lambda t}, \ldots, v_k e^{\lambda t},$$

wobei $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis des Eigenraums V_λ sind.
• Falls die geometrische Vielfachheit von λ kleiner als k ist, besitzt das System die Lösungen

$$(v_j + (A - \lambda I)v_j t + \cdots + (A - \lambda I)^{k-1} v_j t^{n-1}) e^{\lambda t}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

wobei $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis des Hauptraums $\tilde{V}_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda I)^k v = 0\}$ sind.

Bemerkung 4. i) Eulersche Formel: $e^{\alpha + i\beta} = e^\alpha(\cos\beta + i \sin\beta)$, für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) Sei $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ ein nicht-reeller Eigenwert von A mit Eigenvektor $v = u + iw$, $u, w \in \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor $\overline{v}$. Wir erhalten dann die beiden komplexen Lösungen $x_1(t) = ve^{(a+ib)t}$ und $x_2(t) = \overline{v}e^{(a-ib)t}$. Durch die Setzungen

$$y_1(t) := \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} = e^{at}(u\cos(bt) - w\sin(bt)), \quad y_2(t) := \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2i} = e^{at}(w\cos(bt) + u\sin(bt))$$

finden wir zwei reelle Lösungen.

2 Lineare Differentialgleichungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $n \in \mathbb{N}$. Seien $a_j : I \to \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, n-1$, und $b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t) \tag{2}$$

eine inhomogene *lineare Differentialgleichung* n*-ter Ordnung.*
Die Gleichung $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0$ nennt man die zugehörige *homogene lineare Differentialgleichung* n*-ter Ordnung.*

Bemerkung 5. Man kann eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung in ein lineares Differentialgleichungssystem umwandeln: Setzen wir $y_j(t) = y^{(j-1)}(t)$, so erhalten wir das System

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Für $a_i(t) = a_i \in \mathbb{R}$ wird die Differentialgleichung (2)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(t)\,. \tag{4}$$

Das *charakteristische Polynom* dieser DGL ist das Polynom $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$, das das charakteristische Polynom der obigen Matrix ist.

Satz 6. *Es gilt* $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$ *mit paarweise verschiedenen komplexen Zahlen* $\lambda_1, \dots, \lambda_r$*, so bilden die Funktionen*

$$e^{\lambda_i t},\ t \cdot e^{\lambda_i t},\ \dots,\ t^{k_i - 1} \cdot e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \dots, r$$

eine Basis des Lösungraums $\mathcal{L}_0$ *der homogenen DGL* $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0.$

Bemerkung 7. Sei $\lambda_0 = a + ib$ eine nicht-reelle Nullstelle von $P(\lambda)$, dann ist auch $\overline{\lambda}_0$ eine Nullstelle. Die beiden komplexen Lösungen $x_1(t) = t^l \cdot e^{(a+ib)t}$ und $x_2(t) = t^l \cdot e^{(a-ib)t}$ ergeben dann die reellen Lösugnen

$$y_1(t) := \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} = t^l \cdot e^{at}\cos(bt) \quad y_2(t) := \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2i} = t^l \cdot e^{at}\sin(bt)\,.$$

Satz 8. *Für* $\alpha \in \mathbb{R}$ *sei* m_α *die Vielfachheit von* α *bzgl. des Polynoms* $P(\lambda)$*, d.h.* $P(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{m_\alpha} \cdot \tilde{P}(\lambda)$*, mit* $\tilde{P} \in \mathbb{R}[\lambda]$ *und* $\tilde{P}(\alpha) \neq 0$*.*

$*$ *Falls* $b(t) = f(t)e^{\alpha t}$ *ist, mit* $f \in \mathbb{R}[t]$ *Polynom von Grad* d*, dann besitzt* (4) *eine spezielle Lösung der Form*

$$x_p(t) = t^{m_\alpha} \cdot g(t)e^{\alpha x}$$

wobei $g \in \mathbb{R}[t]$ *ein Polynom von Grad* d *ist.*

$*$ *Falls* $b(t) = c_1\sin(\alpha t) + c_2\cos(\alpha t)$ *ist, mit* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*, dann besitzt* (4) *eine spezielle Lösung der Form*

$$x_p(t) = t^{m_\alpha} \cdot (d_1\sin(\alpha t) + d_2\cos(\alpha t))$$

wobei $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$*.*

Im Fall $P(\alpha) = 0$, d.h. $m_\alpha \geq 1$ spricht man auch vom *Resonanzfall.*

Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

Skript DGL 3.

1 Erhaltungsgröße

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ betrachte man das autonome System

$$y' = F(y)\,. \tag{1}$$

Definition 1. Eine stetig differenzierbare Funktion $H\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *erstes Integral* oder *Erhaltungsgröße* des Systems (1), falls H längs jeder Lösung $\varphi\colon I \to D$ von (1) konstant ist, d.h. falls

$$0 = \frac{d}{dt} H(\varphi(t)) = \langle \nabla H(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle = \langle \nabla H(\varphi(t)), F(\varphi(t)) \rangle$$

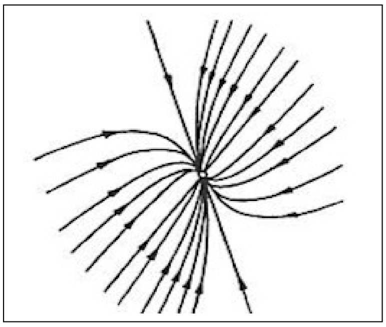
Bemerkung 2. Seien $H\colon D \to \mathbb{R}$ ein erstes Integral und $\varphi\colon I \to D$ eine Lösung des Systems $y' = F(y)$. Die Trajektorie $\varphi(I)$ verläuft stets innerhalb einer Niveaumenge $H^{-1}(a),\ a \in \mathbb{R}$.

Satz 3. *Sei $\Gamma \in D$ eine glatte geschlossene Kurve mit $F(x) \neq 0$ auf Γ. Für eine Lösung $\varphi\colon I \to D$ von (1) mit $\varphi(I) \subseteq \Gamma$ gilt dann $I = \mathbb{R}$, $\varphi(I) = \Gamma$, und φ ist periodisch.*

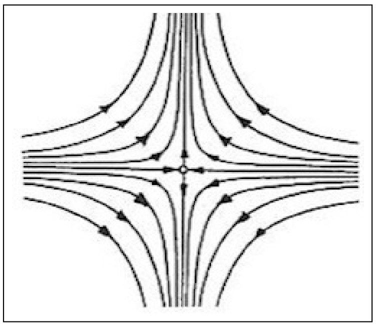
2 Phasenportraits zweidimensionaler linearer Gleichungen

Sei $A \in Mat(2 \times 2, \mathbb{R})$. Um das gesamte Lösungsverhalten des System $x' = A \cdot x$ anschaulich vor uns zu haben, brauchen wir das Phasenportrait. Dafür seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte der Matrix A.

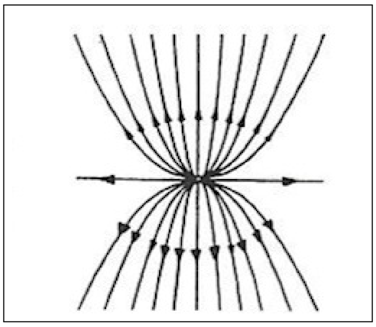
2.1 Reelle Eigenwerte



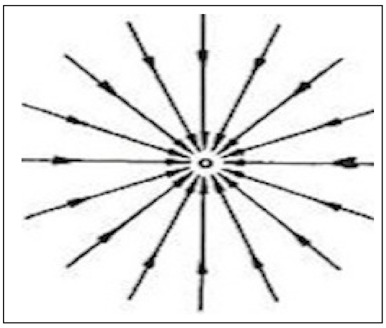
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$:
asymptotisch stabiler 2-tangentialer Knoten



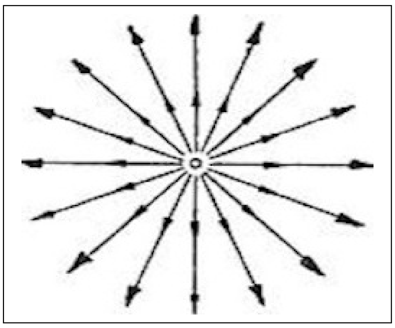
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$:
instabil; Sattelpunkt



$0 < \lambda_2 < \lambda_1$:
instabiler 2-tangentialer Knoten

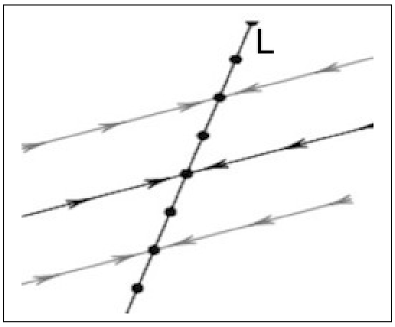


$\lambda < 0$ dopp. EW, $A = \lambda E$:
asymptotisch stabiler Sternpunkt

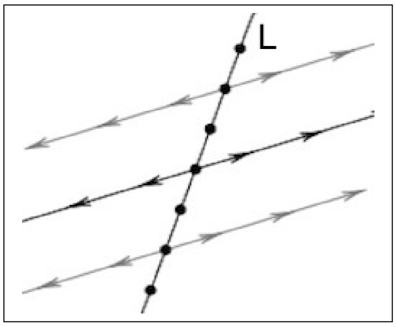


$\lambda > 0$ dopp. EW, $A = \lambda E$:
instabiler Sternpunkt

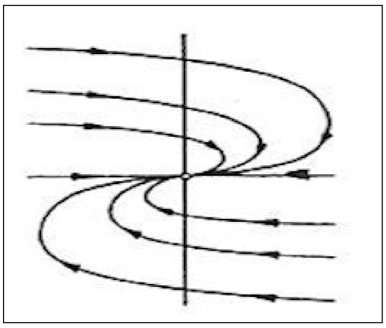
$\lambda = 0$ dopp. EW, $A = 0$:
jeder Punkt in $\mathbb{R}^2$ ist **stabil**



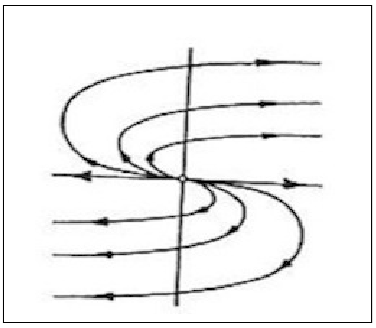
$\lambda_2 < \lambda_1 = 0$:
jeder Punkt auf der Gerade
L ist **stabil**



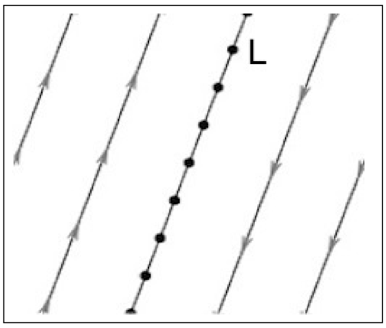
$0 = \lambda_2 < \lambda_1$:
jeder Punkt auf der Gerade
L ist **instabil**



$\lambda < 0$ dopp. EW, $A \neq \lambda E$:
asymptotisch stabiler
1-tangentialer Knoten

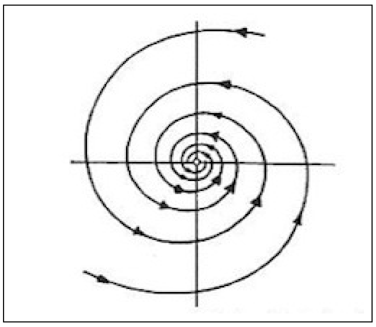


$\lambda > 0$ dopp. EW, $A \neq \lambda E$:
instabiler 1-tangentialer
Knoten

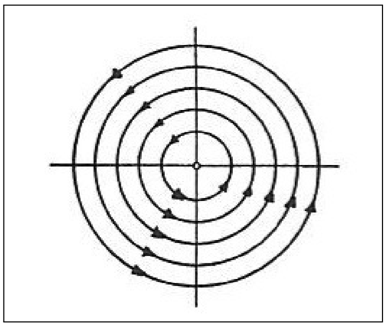


$\lambda = 0$ dopp. EW, $A \neq 0$:
jeder Punkt auf der Gerade
L ist **instabil**

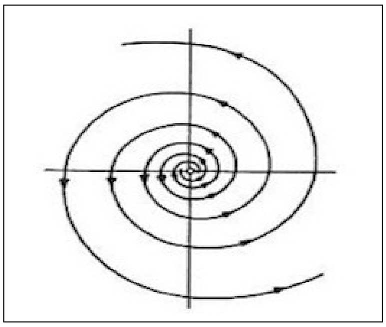
Komplex konjugierte Eigenwerte



$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$
asymptotisch stabiler
Strudel



$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha = 0$
stabiler Strudel / Wirbel
oder Zentrum



$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$
instabiler Strudel

Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

Skript DGL 4.

1 Gleichgewichtspunkte und Stabilität

Betrachte man das autonome System

$$y' = F(y) \tag{1}$$

mit einer stetigen und Lipschitz-stetigen Abbildung $F : D \to \mathbb{R}^n$, die auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist.

Definition 1. i) Die maximale Lösung $\phi_q(t)\colon I_{max} \to \mathbb{R}^n$ des AWP $y' = F(y)$, $y(0) = q$ heißt *Flusslinie* durch $q \in D$. Das Bild einer Flusslinie nennt man *Trajektorie*: $\{\phi_q(t) : t \in I_{max}\}$.
ii) Ein Punkt $p \in D$ mit $F(p) = 0$ heißt *Gleichgewichtspunkt*, oder *Ruhepunkt* oder *stationärer Punkt* der DGL (1). Jeder Ruhepunkt p liefert mittels der Setzung $\phi_p(t) \equiv p$ offenbar eine Lösung der DGL (1).

Lemma 2. *Zwei Trajektorien von* (1) *sind entweder gleich oder disjunkt, d.h. sie schneiden sich nicht.*

Definition 3. Sei y eine auf $[0, +\infty)$ definierte Lösung von (1).

a) Die Lösung y heißt *stabil*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle Lösungen z von (1) mit $||y(0) - z(0)|| < \delta$ für alle $t \geq 0$ existieren und der Ungleichung

$$||y(t) - z(t)|| < \epsilon$$

für alle $t \in [0, \infty)$ genügen.

b) Die Lösung y heißt *instabil*, wenn sie nicht stabil ist.

c) Die Lösung y heißt *attraktiv*, wenn ein $\gamma > 0$ existiert, so dass alle Lösungen z von (1) mit $||y(0) - z(0)|| < \gamma$ für alle $t \geq 0$ existieren und der Bedingung

$$\lim_{t\to\infty} ||y(t) - z(t)|| = 0$$

genügen.

d) Die Lösung y heißt *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil und attraktiv ist.

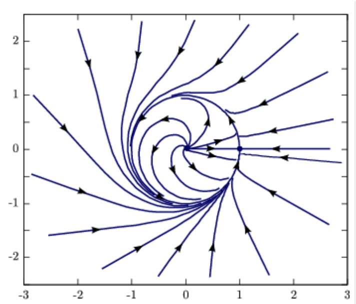
Bemerkung 4. Die Begriffe “stabil” und “attraktiv” sind unabhängig voneinander.
• Die autonome Differentialgleichung $y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y$ besitzt die allgemeine Lsüng $y(t) = (a, b \cdot e^{-t})$. Der kritische Punkt $p := (0, 0)$ ist stabil, denn $|y(t)| = |(a, b)| < \delta := \epsilon$ ist, so gilt $|y(t)| < \epsilon$ für alle $t \geq 0$; aber nicht attraktiv, denn $\lim_{t\to\infty} y(t) = (a, 0) \neq (0, 0)$ für $a \neq 0$.
• Die in Polarkoordinatendarstellung gegebene Differentialgleichung

$$r' = r(1 - r)\,, \qquad \theta' = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

lässt sich explizit lösen: Seien $r_0 := r(t_0)$ und $\theta_0 := \theta(t_0)$, es gilt

$$r(t) = \frac{r_0}{r_0 - (1 - r_0)e^{-t}}\,, \qquad \theta(t) = 2\arctan\left(\frac{2\sin(\theta_0)}{2\cos(\theta_0) - t\sin(\theta_0) + 2}\right)$$

Das Phasenportrait zeigt folgendes Bild: Der Einheitskreis besteht aus der Ruhelage $(1, 0)$ und einer Trajektorie, die in beiden Zeitrichtungen gegen diesen Punkt strebt (auf Einheitskreis ist $r(t) \equiv 1$). Damit ist $p := (1, 0)$ bereits instabil, denn in der Nähe von p "starten" auf dem Einheitskreis Lösungen, die eine ϵ-Umgebung von p verlassen (denn die Lösungen durchlaufen den Einheitskreis). Andererseits gilt $(r(t), \theta(t)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} (1, 0)$ für alle Lösungen, und daher ist p eine attraktive Ruhelage.



Stabilität bei linearen DGL

Satz 5. *Sei $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die Eigenwerte von A, die hier so angeordnet seien, dass jedem Eigenwert λ_k ein Jordan-Block J_k in der Jordanschen Normalform entspricht. Dann gelten:*

a) Das Gleichgewichts $\phi \equiv 0$ von $y' = A \cdot y$ ist genau dann stabil, wenn $\mathrm{Re}(\lambda_k) \leq 0$ für alle $k = 1, \ldots, r$ gilt und der Jordan-Block J_k für die Eigenwerte mit $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$ eindimensional ist.

b) Das Gleichgewichts $\phi \equiv 0$ von $y' = A \cdot y$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ für alle $k = 1, \ldots, r$ gilt.

c) Das Gleichgewichts $\phi \equiv 0$ von $y' = A \cdot y$ ist genau dann instabil, wenn es einen Eigenwert λ_k gibt, so dass entweder $\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0$ gilt oder $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$ ist und der zugehörige Jordan-Block J_k jedoch mindestens die Dimension 2×2 hat.

Linearisierte Stabilität bei nichtlinearen DGL

Satz 6. *Sei $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $F(p) = 0$, wobei D eine offene Menge ist.*

a) Der Ruhepunkt $\phi_p \equiv p$ von $y' = F(y)$ ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $DF(p)$ negativen Realteil haben.

b) Der Ruhepunkt $\phi_p \equiv p$ von $y' = F(y)$ ist instabil, wenn mindestens ein Eigenwert der Jacobi-Matrix $DF(p)$ positiven Realteil hat.

Die Methode von Lyapunov

Betrachte das autonome System (1), und sei $\phi_p \equiv p$ ein Gleichgewichtspunkt des Systems.

Definition 7. Eine stetig differenzierbare Funktion $V\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *Lyapunov-Funktion* des Systems (auf D), falls gilt:

$$\begin{aligned} V(p) = 0\,, V(y) > 0 \qquad & \text{für alle } y \in D \setminus \{p\}, \\ \dot{V}(y) := \langle \nabla V(y), F(y) \rangle \leq 0 \qquad & \text{für alle } y \in D. \end{aligned} \tag{2}$$

Falls sogar $\dot{V}(y) < 0$ für alle $y \in D \setminus \{p\}$ gilt, heißt V *strenge Lyapunov-Funktion.*

Satz 8 (Stabilität nach Lyapunov)**.**

a) Sei $V\colon D \to \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion des Systems. Dann ist der Gleichgewichtspunkt $\phi_p \equiv p$ stabil.

b) Sei $V\colon D \to \mathbb{R}$ eine strenge Lyapunov-Funktion des Systems. Dann ist der Gleichgewichtspunkt $\phi_p \equiv p$ asymptotisch stabil.

Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

Skript FT 1.

1 Holomorphe Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $c \in U$.

Definition 1. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar im Punkt* c, falls der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ existiert.

Satz 2. *Sei $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Funktion, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- *f ist in c komplex differenzierbar;*
- *f erfüllt in c die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \textit{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

- *Im Punkt c verschwindet die Wirtinger Ableitung nach $\bar{z}$: $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(c) = 0$.*

Definition 3. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, falls f in U komplex differenzierbar ist, d.h. falls f in jedem Punkt von U komplex differenzierbar ist. Man schreibt $f \in \mathcal{O}(U)$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph im Punkt* c, falls eine Umgebung $V \subseteq U$ von c existiert, so dass $f_{|V} : V \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *ganz.*

Bemerkung 4. Die Summe, das Produkt und die Komposition holomorpher Funktionen sind selbst holomorph. Auch der Quotient zweier holomorpher Funktionen, dessen Nenner nullstellenfrei ist, stellt wieder eine holomorphe Funktion dar.

2 Fundamentale Eigenschaften holomorpher Funktionen

Definition 5. Ein *Gebiet* ist eine offene zusammenhängende Menge $G \subset \mathbb{C}$.

Satz 6. *Jede holomorphe Funktion ist unendlich oft komplex differenzierbar.*

Satz 7 (Maximum- und Minimumprinzip für beliebige Gebiete)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $g\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.*
◦ *Nimmt $|g| : G \to \mathbb{C}$ ein lokales Maximum an, so ist g konstant.*
◦ *Nimmt $|g| : G \to \mathbb{C}$ im Punkt $c \in G$ ein lokales Minimum an, so ist $g(c) = 0$ oder g konstant.*

Satz 8 (Maximum- und Minimumprinzip für beschränkte Gebiete)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und sei $g : \bar{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.*

- *Ist g auf G holomorph, so gilt für alle $p \in \bar{G}$: $|g(p)| \le \max\limits_{z\in\partial G} |g(z)|$.*
- *Ist g auf G holomorph und nullstellenfrei, so gilt für alle $p \in \bar{G}$: $|g(p)| \ge \min\limits_{z\in\partial G} |g(z)|$.*

Satz 9 (Offenheitssatz und Satz der Gebietstreue)**.**
◇ *Jede nirgends lokal konstante holomorphe Funktion ist offen.*
◇ *Jede nirgends lokal konstante holomorphe Funktion ist gebietstreue.*

Satz 10 (Satz von Liouville)**.** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Satz 11 (Identitätssatz)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $f = g$.

b) Die Menge $\{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$ besitzt einen Häufungspunkt in G.

c) Es gibt einen Punkt $c \in G$ mit $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

3 Potenzreihen

Sei $P(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe ($a_n \in \mathbb{C}$) mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

Definition 12. Die reelle Zahl $r \in [0, \infty)$ heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe $P(z)$, falls $B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ die größte offene Kreisscheibe ist, auf der $P(z)$ konvergiert.

Satz 13 (Formel von Cauchy-Hadamard)**.** *Die Potenzreihe $P(z)$ besitzt den Konvergenzradius* $r = \left(\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$.

Satz 14 (Quotientformel)**.** *Die Potenzreihe $P(z)$ besitze nur endlich viele verschwindende Koeffizienten und die Punktfolge $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)_n$ konvergiere gegen einen reellen Wert oder ∞. Dann ist dieser Limes der Konvergenzradius vom $P(z)$.*

Satz 15. *Die Potenzreihe $P(z)$ besitze den Konvergenzradius $r > 0$. Dann:*

a) Die Potenzreihe stellt auf $B := B_r(z_0)$ eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(B)$ dar.

b) Für die Koeffizienten a_n gilt $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ (Taylor Formel).

c) Die formal gliedweise differenzierte Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z - z_0)^{n-1}$ besitzt den Konvergenzradius r und stellt die Ableitungsfunktion $f' \in \mathcal{O}(B)$ dar.

d) Die formal gliedweise integrierte Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot a_n \cdot (z - z_0)^{n+1}$ besitzt den Konvergenzradius r und stellt eine holomorphe Stammfunktion $F \in \mathcal{O}(B)$ von f dar.

4 Harmonische Funktionen

Definition 16. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und die Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$ (als Funktionen zweier reeller Variablen) zweimal reell differenzierbar. Die Funktion u heißt *harmonische Funktion*, falls

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{auf } U \text{ gilt.}$$

Die Funktionen u und v heißen *harmonisch konjugiert* zueinander, falls u und v harmonisch sind und $f := u + i \cdot v$ holomorph auf U ist.

Bemerkung 17. Real- und Imaginärteil einer holomorphe Funktion sind harmonisch.

Satz 18. *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch, so existiert eine zu u harmonisch konjugierte Funktion. Diese ist bis auf eine reelle additive Konstante eindeutig bestimmt.*

Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

Skript FT 2.

1 Nullstellen

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$ (d.h. $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph), $z_0 \in U$ mit $f(z_0) = 0$ und f verschwinde nicht lokal um z_0. Sei $P(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ die Taylorreihe von f um c mit $a_k \neq 0$. Die natürliche Zahl k heißt *Nullstellenordnung* (= *Vielfachheit* der Nullstelle) der Funktion f im Punkt z_0

Satz 1 (Satz von Rouché)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und γ ein einfach geschlossener, nullhomologer Weg in U. Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $|g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in |\gamma|$. Dann haben die Funktionen f und $f+g$ gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) im Innern von γ.*

2 Singularitäten

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei D eine diskrete Teilmenge von U und sei $f : U \setminus D \to \mathbb{C}$ holomorph.

Definition 2. Jeder Punkt von D heißt eine *isolierte Singularität* von f.

Definition 3. Eine isolierte Singularität $c \in D$ von f lässt sich in drei Klassen einteilen:

i) c heißt *hebbare Singularität*, falls f holomorph nach c fortsetzbar ist: $\exists \lim_{z\to c} f(z) \in \mathbb{C}$.

ii) c heißt *Polstelle*, falls gilt $\lim_{z\to c} |f(z)| = \infty$.
In diesem Fall existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\lim\limits_{z\to c}(z-c)^k \cdot f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und k heißt die *Polstellenordnung* von f in c.

iii) c heißt *wesentliche Singularität*, falls c weder eine hebbare Singularität noch eine Polstelle von f ist: $\nexists \lim_{z\to c} f(z)$.

Definition 4. Falls f keine wesentliche Singularitäten hat, heißt f *meromorph*, und man schreibt $f \in \mathcal{M}(U)$.

Sei $c \in D$, so lässt sich f um c eindeutig in eine *Laurentreihe* $L(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ entwickeln, die in einem Kreisring der Form $R_{0,s} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-c| < s\}$ kompakt gegen f konvergiert (gleichmäßige Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge).
Der *Hauptteil* von $L(z)$ ist $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-c)^n$ und der *Nebenteil* ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$.

Satz 5 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
i) Der Punkt c ist eine hebbare Singularität von f;
ii) Es existiert eine Umgebung $V \subset U$ von c, so dass f auf $V \setminus \{c\}$ beschränkt ist;
iii) Es ist $a_n = 0$ für alle $n < 0$, d.h. der Hauptteil von $L(z)$ verschwindet.

Satz 6. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

i) Der Punkt c ist eine Polstelle der Ordnung k von f.

ii) Es gibt $g : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(c) \neq 0$ und $f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k}$ für $z \in U \setminus \{c\}$.

iii) Es gibt eine Umgebung $V \subset U$ von c, so dass $\lim_{z\to c} |f(z) \cdot (z-c)^j| = \infty$ für $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ und $f(z) \cdot (z-c)^k$ auf $V \setminus \{c\}$ beschränkt ist.

iv) Es ist $a_n = 0$ für $n < -k$ und $a_{-k} \neq 0$, d.h. der Hauptteil von $L(z)$ ist endlich.

Satz 7 (Casorati-Weierstraß). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
i) Der Punkt c ist eine wesentliche Singularität von f;
ii) Zu jedem $w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ existiert eine Folge $(z_n)_n \subset U \setminus \{c\}$ mit $z_n \to c$ und $f(z_n) \to w$;
ii-bis) Für jede Umgebung $V \subset U$ von c ist das Bild $f(V \setminus \{c\})$ dicht in $\mathbb{C}$;
iii) Es ist $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$, d.h. der Hauptteil von $L(z)$ ist unendlich.

Definition 8. Der Koeffizient a_{-1} der Laurentreihe von f heißt das *Residuum* von f in c: $\mathrm{Res}_c(f) := a_{-1}$.

Lemma 9. *Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $f, g \in \mathcal{O}(U \setminus \{c\})$. Dann gilt:*

- *Ist f holomorph (fortsetzbar) in c, so ist $\mathrm{Res}_c(f) = 0$.*
- Res_c *ist $\mathbb{C}$-linear:* $\mathrm{Res}_c(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \mathrm{Res}_c(f) + b \cdot \mathrm{Res}_c(g)$ *for $a, b \in \mathbb{C}$.*
- *(Transformationsregel) Sei $V \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma \in V$, $h : U \to V$ holomorph mit $h(c) = \gamma$, $h'(c) \neq 0$. So folgt:* $\mathrm{Res}_c f = \mathrm{Res}_\gamma((f \circ h) \cdot h')$

Lemma 10. *Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$, $m \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{M}(U)$, $g \in \mathcal{O}(U)$. Dann gilt:*

- *Besitzt f in c einen Pol m-ter Ordnung, so gilt*
$$\mathrm{Res}_c(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to c} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-c)^m f(z))$$
- *Besitzt f in c einen Pol erster Ordnung, so gilt* $\mathrm{Res}_c(g \cdot f) = g(c) \cdot \mathrm{Res}_c(f)$.
- *Besitzt f in c eine Nullstelle erster Ordnung, so gilt* $\mathrm{Res}_c\left(\frac{g}{f}\right) = \frac{g(c)}{f'(c)}$.

3 Nullstellen und isolierte Singularitäten im Punkt ∞

Sei $f : R_{r,\infty}(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $f^* : R_{0,\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}, w \mapsto f\left(\frac{1}{w}\right)$. Man klassifiziert die Nullstellen und die isolierten Singularitäten von f im Punkt ∞, wie die entsprechenden Nullstellen und isolierten Singularitäten von f^* im Nullpunkt.

• Nach dem Transformationregel mit $h(z) = \frac{1}{z}$ gilt $\mathrm{Res}_\infty f(z)) = \mathrm{Res}_0\left(-\frac{1}{z^2} \cdot f(\frac{1}{z})\right)$.

• Eine im Punkt ∞ holomorphe Funktion kann dort ein nicht verschwindendes Residuum besitzen, z.B. $\mathrm{Res}_\infty \frac{1}{z} = -1$.

4 Die Ordnungsfunktion

Definition 11. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{M}(U)$. Sei $L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ die Laurentriehe von f um $c \in U$, so definiert man die *Ordnung* von f in c durch
$$\mathrm{ord}_c f = \begin{cases} m & \text{falls } a_m \neq 0 \text{ und } L(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-c)^n \\ \infty & \text{falls } L(z) = 0, \text{ also } a_n = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Anmerkung: f hat in c eine Polstelle der Ordnung $k \iff \mathrm{ord}_c(f) = -k < 0$.

Lemma 12 (Rechenregeln). *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $f, g \in \mathcal{M}(U)$. Dann*
$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_c(fg) &= \mathrm{ord}_c(f) + \mathrm{ord}_c(g), \\ \mathrm{ord}_c\left(\frac{f}{g}\right) &= \mathrm{ord}_c(f) - \mathrm{ord}_c(g) \qquad \textit{falls } g \textit{ nicht lokal um } c \textit{ verschwindet} \\ \mathrm{ord}_c(f \pm g) &\geq \min(\mathrm{ord}_c(f), \mathrm{ord}_c(g)), \qquad \text{“=” } \textit{wenn } \mathrm{ord}_c(f) \neq \mathrm{ord}_c(g) \end{aligned}$$

Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

Skript FT 3.

1 Die Indexfunktion

Sei γ ein geschlossener Weg in einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$.

Definition 1. Für $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ wird der *Index* (oder die *Umlaufzahl*) von γ um z definiert als

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi \,,$$

und die Funktion $\mathrm{ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus |\gamma| \to \mathbb{C}, z \mapsto \mathrm{ind}_\gamma(z)$ heißt *Indexfunktion.*
Weiter definiert man das *Innere* von γ als $\mathrm{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| : \mathrm{ind}_\gamma(z) \neq 0\}$.
Zwei geschlossene Wege α und β in U heißen *homolog* in U, falls $\mathrm{ind}_\alpha f(z) = \mathrm{ind}_\beta f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U$. Insbesondere heißt der Weg γ *nullhomologer Weg* in U, falls gilt: $\mathrm{Int}(\gamma) \subseteq U$.

• Die Indexfunktion $\mathrm{ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus |\gamma| \to \mathbb{C}$ nimmt nur ganzzahlige Werte an, ist stetig und somit auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ konstant.

• Die ganze Zahl $\mathrm{ind}_\gamma(z_0)$ gibt an, wie oft der Weg γ den Punkt z_0 umläuft. Dabei zeigt ein negativer Wert an, dass der Punkt im Uhrzeigersinn (d.h. im mathematisch negativen Sinn) umlaufen wird.

2 Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

Satz 2 (Sätze von Goursat und Morera). *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
i) f ist holomorph in U;
ii) Für alle kompakten Dreiecke $\Delta \subseteq U$ gelte $\oint_{\partial\Delta} f(z)\ dz = 0$.

Die Implikation $i) \Rightarrow ii)$ heißt Satz von Goursat und $ii) \Rightarrow i)$ heißt Satz von Morera.

Satz 3 (Cauchyscher Integralsatz). *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
i) f ist holomorph auf U;
ii) Für jeden in U nullhomologer Weg gilt $\int_\gamma f(z)\ dz = 0$.
iii) Für je zwei in U homologe geschlossene Wege α und β gilt $\int_\alpha f(z)\ dz = \int_\beta f(z)\ dz$.

Unter dem Cauchyschen Integralsatz im engeren Sinn versteht man die Implikation $i) \Rightarrow ii)$.
Die entgegengesetzte Richtung $ii) \Rightarrow i)$ wird auch manchmal Satz von Morera genannt.

Satz 4 (Cauchysche Integralformel). *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
i) f ist holomorph auf U;
ii) Für jeden in U nullhomologer Weg γ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{ind}_\gamma(w) \cdot f^{(k)}(w) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - w)^{k+1}} d\xi \,, \quad w \in U \setminus |\gamma| \,.$$

Bemerkung 5 (Stetigkeit am Rand -Version der Integralsätze). Die Aussagen der Sätze 3 und 4 gelten bereits, wenn γ ein einfach geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $f : \overline{\mathrm{Int}(\gamma)} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist, die auf dem Gebiet $\mathrm{Int}(\gamma)$ holomorph ist.

Bereits unter dieser schwächeren Voraussetzung erhalten wir somit die Gleichungen:
i) $\displaystyle\int_\gamma f(z)\ dz = 0$ und ii) $\displaystyle\mathrm{ind}_\gamma(w) \cdot f^{(k)}(w) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - w)^{k+1}} d\xi$ für $w \in U \setminus |\gamma|$ und $k \in \mathbb{N}$.

3 Der Residuensatz

Satz 6 (Residuensatz)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und γ ein nullhomologer Weg in U. Sei A eine diskrete Teilmenge von U mit $A \cap |\gamma| = \emptyset$. Ferner sei $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{c \in A \cap \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{ind}_\gamma(c) \cdot \mathrm{Res}_c f$$

Satz 7 (über die Residuensumme)**.** *Seien $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$, und sei $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}_{z_i} f + \mathrm{Res}_\infty f = 0\,.$$

4 Logarithmen und Wurzeln

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$.

Definition 8. Eine holomorphe Funktion $l \in \mathcal{O}(G)$ heißt *(holomorpher) Logarithmus* von f, falls gilt $\exp(l(z)) = f(z)$ für alle $z \in G$.

Lemma 9. *Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ eine holomorphe Funktion, so dass auf dem Bildgebiet $f(G)$ ein Zweig des Logarithmus existiert. Dann besitzt f einen holomorphen Logarithmus $l \in \mathcal{O}(G)$.*

• Falls ein Logarithmus $l \in \mathcal{O}(G)$ von f existiert, dann ist $f(z)$ nullstellenfrei, wegen $f(z) = \exp(l(z)) \neq 0$ für alle $z \in G$.

• Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ nullstellenfrei, und sei $l \in \mathcal{O}(G)$ ein Logarithmus von f, dann ist $l'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$.

Satz 10 (Existenzkriterium einer Logarithmusfunktion)**.** *Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ nullstellenfrei. Auf G existiert genau dann eine holomorphe Logarithmusfunktion der Funktion f, wenn die Funktion $\frac{f'}{f}$ auf G integrabel ist, d.h. $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'}{f}dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg $\gamma \subset G$.*

Definition 11. Für $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ heißt eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}(G)$ eine *(holomorphe) k-te Wurzel* von f, falls gilt $(g(z))^k = f(z)$ für alle $z \in G$.

Lemma 12. *Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ nicht identisch 0, und $z_0 \in G$ eine Nullstelle von f. Existiere eine holomorphe k-te Wurzel von f, so gilt $k \mid \mathrm{ord}_{z_0}(f)$.*

5 Der Argumentensatz

Integralen der Form $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ kommen auch beim Zählen von Null- und Polstellen vor:

Satz 13 (Argumentensatz, Null- und Polstellen zählende Integra)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und γ ein einfach geschlossener, in U nullhomologer und positiv orientierter Weg in U. Weiter sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion auf U, so dass auf $|\gamma|$ weder Null- noch Polstellen von f liegen. Bezeichne P die Polstellenmenge und N die Nullstellenmenge von f, so ist die Menge $M := (P \cup N) \cap \mathrm{Int}(\gamma)$ endlich und es gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{c \in M} \mathrm{ord}_c(f) = \textit{(Anzahl* der Nullstellen von } f\textit{) - (Anzahl* der Polstellen von } f\textit{)}$$

(*) in $\mathrm{Int}(\gamma)$ und jeweils gemäß mit Vielfachheiten gezählt.

Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

Skript FT 4.

1 Holomorphie und Integrabilität

Sei U offen und sei $f \in \mathcal{O}(U)$. $F : U \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* von f, falls $F' = f$ gilt.

Satz 1. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

a) f ist integrabel in U, besitzt also eine Stammfunktion.

b) Für jeden geschlossenen Weg γ in U gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Will man zeigen, dass keine Stammfunktion existiert, so braucht man nur einen geschlossenen Weg α mit $\int_\alpha f(z)dz \neq 0$ anzugeben.

Definition 2. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *lokal integrabel* in U, wenn jeder Punkt $c \in U$ eine offene Umgebung $V \subset U$ besitzt, so dass $f_{|V}$ integrabel in V ist, also eine Stammfunktion in V besitzt.

Satz 3. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

a) f ist holomorph in U;

b) f ist lokal integrabel in U.

Sei zusätzlich U ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$, so gilt die Äquivalenz folgender zwei Aussagen:

a) f ist holomorph in U;

b) f ist integrabel in U.

2 Uneigentliche Integrale

Im Folgenden liegt immer das Riemann-Integral zugrunde.

Definition 4. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1) Ist $I = [a, \infty)$ und existiert $\lim\limits_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$ ($\in \mathbb{R}$), dann ist $\int_a^\infty f(x)dx$ als dieser Grenzwert definiert (man nennt f *uneigentlich integrierbar* über $[a, \infty)$).

2) Ist $I = (-\infty, b]$ und existiert $\lim\limits_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)dx$ ($\in \mathbb{R}$), dann ist $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ als dieser Grenzwert definiert (man nennt f *uneigentlich integrierbar* über $(-\infty, b]$).

3) Ist $I = (-\infty, \infty)$ und existiert $\lim\limits_{a\to-\infty} \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ dann ist $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ als der Grenzwert definiert (man nennt f *uneigentlich integrierbar* über $\mathbb{R}$).

Der folgende Satz liefert ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines uneigentlichen Integrals.

Satz 5. *Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ($a \in \mathbb{R}$), und es gebe eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ mit*

$$\int_a^R |f(x)|dx \leq M \qquad \text{für alle} \qquad R \geq a\,.$$

Dann existieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^\infty f(x)dx \qquad \text{und} \qquad \int_a^\infty |f(x)|dx\,.$$

Bemerkung 6. Der vorangegangene Satz liefert nur ein hinreichendes Kriterium.
Es kann passieren, dass das uneigentliche Integral über f existiert, nicht jedoch das über $|f|$.
Bemerkung 7. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion, d.h. $f(-x) = -f(x)$, so gilt für alle $R \geq 0$

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 0 \qquad \text{und somit} \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 0\,.$$

Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ muss aber nicht existieren, wie man am Beispiel $f(x) = x$ sehen kann.

Satz 8 (Existenzkriterien)**.** *Sei J ein unbeschränktes Intervall der Form $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ oder $\mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}$), weiter sei $f : J \to \mathbb{C}$ stetig.*

- *Kriterium 1: Gibt es ein $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$, so dass $t \mapsto t^k \cdot |f(t)|$ auf J beschränkt ist, dann existiert das Integral $\displaystyle\int_J f(t)dt$.*
- *Kriterium 2: Sei $g : J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*
  Ist $|f| \leq g$ auf J und existiert $\displaystyle\int_J g(t)dt$, so existiert das Integral $\displaystyle\int_J f(t)dt$.

Standard-Abschätzung: Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein Weg in $\mathbb{C}$, f eine auf $|\gamma|$ stetige Funktion und bezeichne $L(\gamma)$ die Länge von γ. Dann gilt:

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq L(\gamma) \cdot \sup_{z\in|\gamma|} |f(z)|\,.$$

3 Berechnung spezieller Integrale

Typ 1: $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$, wo $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ mit P, Q Polynomen. Dabei gilt $Q(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$.
Integrale dieser Form lassen sich mit der Substitution $z = e^{it}$ in ein Kreisintegral einer komplex-rationalen Funktion $\tilde{R}(z)$ einer Variablen überführen. Dieses ist dann i.A. leicht mithilfe des Residuensatz auswertbar.

Typ 2: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$, wo $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ ist und $P(x), Q(x)$ Polynomen sind, mit Q nullstellenfrei auf $\mathbb{R}$.
Nach der eulerschen Formel ist $\int_I \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\alpha x)dx = \mathrm{Re}\left(\int_I \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx\right)$ und $\int_I \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(\alpha x)dx = \mathrm{Im}\left(\int_I \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx\right)$, weswegen wir uns auf den Integraltyp $\int_I \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$ beschränken.

Typ 2a: $\deg Q(x) \geq 2 + \deg P(x)$**.** Sei R so groß gewählt, dass alle Singularitäten von $f(z) := \frac{P(x)}{Q(x)}$ in $B_R(0)$ liegen. *Ansatz:* Das Integral von $f(z)$ auf dem Weg $\gamma_R = [-R, R] \oplus \beta_R$ ($\beta_R : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}$) lässt sich mit dem Residuensatz ausrechnen, und mit der Standard-Abschätzung kann man den Grenzwert $\lim_{R\to\infty} \int_{\beta_R} f(z)dz = 0$ überprüfen.

Typ 2b: $\deg Q(x) = 1 + \deg P(x)$. Hier wählt man normalerweise den Rand eines Rechtecks als Integrationsweg, und zwar der Rechteck mit Eckpunkten $R, R + iR, -R + iR, -R$.

Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

Skript FT 5.

1 Konforme Abbildungen

Definition 1. Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine holomorphe Abbildung $f : U \to V$ heißt *biholomorph*, falls f bijektiv und auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ holomorph ist.

Satz 2. *Seien U, V offene Teilmengen von $\mathbb{C}$. Die Abbildung $f : U \to V$ ist genau dann biholomorph, wenn sie holomorph und bijektiv ist.*

Definition 3. Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine reell differenzierbare und in jedem Punkt von U winkel- und orientierungstreue bijektive Abbildung $f : U \to V$ heißt *konform.*

Satz 4. *Die konforme Abbildungen sind genau die biholomorphe Abbildungen.*

2 Riemannscher Abbildungssatz

Satz 5 (Riemannscher Abbildungssatz)**.** *Sei G ein von $\mathbb{C}$ verschiedenes einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$, dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{E} := \{|z| < 1\}$.*
Sei zusätzlich $p \in G$, dann gibt es genau eine biholomorphe Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{E}$ mit $\varphi(p) = 0$ und $\varphi'(p) \in (0, \infty)$.

Bemerkung 6. i) Auf die Voraussetzung $G \neq \mathbb{C}$ im Satz kann nicht verzichtet werden, weil jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{E}$ konstant ist (Satz von Liouville), und damit nicht konform.
ii) Da der einfache Zusammenhang eine topologische Invariante ist, ist auch die Umkehrung des Riemannschen Abbildungssatz richtig:
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Die Menge U ist genau dann bijektiv auf $\mathbb{E}$ abbildbar, wenn U ein von $\mathbb{C}$ verschiedenes einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ ist.

3 Schwarzsches Lemma

Satz 7 (Schwarzsches Lemma)**.** *Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine holomorphe Abbildung mit $f(0) = 0$.*
Dann gilt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$.
Gelte zusätzlich $|f'(0)| = 1$ oder $|f(c)| = |c|$ für ein $c \in \mathbb{E}, c \neq 0$, dann ist f eine Drehung, d.h. $f(z) = \alpha \cdot z$ für ein $\alpha \in \partial\mathbb{E}$.

4 Möbiustransformationen

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$, so heißt die rationale Funktion $f : z \mapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$ *gebrochene lineare Transformation* oder *Möbiustransformation.*

f als konforme Abbildung in $\mathbb{C}$.
Fall C1, $c = 0$: Die Möbiustransformation $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ist konform mit Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{d}{a}z - \frac{b}{a}$.
Fall C2, $c \neq 0$: Die Möbiustransformation $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ist konform mit Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$.

f als konforme Abbildung in $\mathbb{P}$ Bezeichne $\mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Riemannsche Zahlenkugel. Die Abbildung f wird nun zu einer konformen Abbildung $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ erweitert, indem die Punkte ∞ und $-\frac{d}{c}$ in die Definitionsmenge aufgenommen werden.

Fall P1, $c = 0$: Die Möbiustransformation $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}, z \mapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ist konform mit $f(\infty) = \infty$. Die Umkehrabbildung ist $f^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{d}{a}z - \frac{b}{a}$, $f^{-1}(\infty) = \infty$

Fall P2, $c \neq 0$: Die Möbiustransformation $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ist konform mit $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ und $f(\infty) = \frac{a}{c}$.

Die Umkehrabbildung ist $f^{-1} : \mathbb{P} \to \mathbb{P} z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$ mit $f(\frac{a}{c}) = \infty$ und $f(\infty) = -\frac{d}{c}$.

Beispiel 8. Die Cayleyabbildung $\varphi : z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ bildet die komplexe obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ auf den Einheitskreis $\mathbb{E} := \{|z| < 1\}$ konform ab.

Die Umkehrabbildung ist $\varphi^{-1} : z \mapsto i \cdot \dfrac{z+1}{-z+1}$. Man kann sie bestimmen, indem man die Abbildung φ zur komplexen Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$ schreibt. Dann ist die Umkehrabbildung durch die Möbiustransformation zur inversen Matrix gegeben.

Satz 9 (Kreisverwandtschaft)**.** *Jede gebrochene lineare Transformation $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ führt Kreislinie in $\mathbb{P}$ wieder in Kreislinie in $\mathbb{P}$ über.*

Man beachtet, dass es zwei Arten von Kreislinien K in $\mathbb{P}$ gibt:
1.Art: $\infty \notin K$. Dann handelt es sich um eine Kreislinie in $\mathbb{C}$.
2.Art: $\infty \in K$. Dann entspricht dieser Kreislinie K einer Gerade in $\mathbb{C}$.

4.1 Übersicht der wichtigsten Automorphismengruppen

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Aut}\ \mathbb{P} &= \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C}\,, ad-bc \neq 0 \right\} \\
\mathrm{Aut}\ \mathbb{C} &= \{ z \mapsto az+b \mid a,b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \} \\
\mathrm{Aut}\ \mathbb{H} &= \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C}\,, ad-bc = 1 \right\} \\
\mathrm{Aut}\ \mathbb{E} &= \left\{ z \mapsto a\frac{z-u}{\bar{u}z-1} \mid a \in \partial\mathbb{E}\,, u \in \mathbb{E} \right\} \\
\mathrm{Aut}\ \mathbb{C}^* &= \{ z \mapsto a \cdot z \mid a \in \mathbb{C}, a \neq 0 \} \cup \{ z \mapsto a \cdot z^{-1} \mid a \in \mathbb{C}, a \neq 0 \} \\
\mathrm{Aut}\ \mathbb{E}^* &= \{ z \mapsto a \cdot z \mid a \in \partial\mathbb{E} \}
\end{aligned}
$$